**Решение неравенств**

Что следует помнить перед решением неравенств?

1.*Что значит решить неравенство?*

 Неравенство с одним неизвестным получается, когда соединяют знаком неравенства два выражения, содержащих одну букву (одно неизвестное), или, что близко по смыслу, две функции от одной и той же переменной.

 Ограничимся неравенствами с одним неизвестным.

 *Область допустимых значений* (ОДЗ) неравенства - множество значений неизвестного, при подстановке которых получается осмысленное числовое неравенство.

 Решение неравенства – это такое значение неизвестного, при подстановке которого получается верное числовое неравенство.

 *Решить неравенство –* значитнайти, описать множество его решений.

 Два неравенства называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

 Одно неравенство является *следствием* другого, если множество его решений содержит в себе множество решений второго.

 Иными словами, при переходе от одного неравенства к другому – его следствию, мы не должны терять ни одного решения исходного неравенства.

2. *Стандартные неравенства.*

 Решение неравенств обычно распадается на два шага: преобразование неравенства к одному из стандартных; решение стандартного неравенства.

 К стандартным неравенствам относятся следующие типы неравенств:

1. линейное неравенство

 ax + b > 0;

1. кусочно-линейное неравенство

 │ax + b│ < 0;

1. квадратное неравенство

ах2+bx+с > 0;

1. степенное неравенство

xn > a;

1. показательное неравенство

ax > b;

1. логарифмическое неравенство

logax > b.

*3.Переход к следствию*

 Разберем основные трудности, которые встречаются при переходе от неравенства к его следствию:

1. *умножение на одну и ту же функцию* (например освобождение от знаменателя). Этот прием рекомендуется выполнять лишь при уверенности, что множитель сохраняет постоянный знак. В противном случае лучше перенести все члены в одну часть неравенства и воспользоваться методом интервалов;
2. *Логарифмирование – потенцирование.* Эти преобразования совершают с помощью строго монотонных функций, поэтому следить за сохранением равносильности здесь проще – главная трудность связана с сохранением ОДЗ.

*Пример*

$$\left\{\begin{array}{c}х-1<3-х\\1<х<3\end{array}\right. ⟺\left\{\begin{array}{c}х<2,\\1<x<3\end{array}\right.⟺1<x<2.$$

*Ответ: (1:2)*

*4.***Замена неизвестного. Решая неравенство**$Место для формулы.$**, часто полезно делать замену неизвестного. При этом, как правило, приходится решать неравенство не на всей его естественной области определения, а на меньшей.**

*Пример*

22x+3 – 2x+5 + 14 ≥ 0.

Замена: 2х+1 = z, ОДЗ: z > 0.

22x+3 – 2х+5 +14 ≥ 0 ⟺ 2z2 -16z +14 ≥ 0, z > 0 ⟺ z2 - 8z + 7 ≥ 0, z > 0; корни 1; 7; z є (0; 1] U [7; +∞).

z є (0;1] ⟺ 0 < 2x+1 ≤ 1 ⟺ x ≤ -1; z є [7;+∞) ⟺ 2x+1 ≥ 7 ⟺ x ≥ -1 + log27.

**В чем состоит важнейший метод решения неравенств – метод интервалов?**

*Метод интервалов* – метод нахождения знака выражения (а значит, и решения неравенства) с помощью разбиения ОДЗ выражения на интервалы (промежутки), на каждом из которых выражение сохраняет постоянный знак.

Метод интервалов основан на том, что функция, непрерывная на некотором интервале и не обращающаяся на нем в нуль, сохраняет на этом интервале постоянный знак.

Методом интервалов решаются, прежде всего, рациональные неравенства, т.е. неравенства, в одной части которых стоит рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , где Р(х) и Q(х) - многочлены, а в другой части – нуль.

Пример

$\frac{1}{х+1}+\frac{2}{x+3}<\frac{3}{x+2}$.

Перенесем правую часть влево, приведем к общему знаменателю и разложим на множители числить дроби:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x+2}<0⟺\frac{x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)}>0.$$

\_+\_\_.\_\_\_-\_ \_.\_\_+\_\_\_.\_\_\_\_-\_\_\_\_. -\_\_.\_\_\_\_\_\_+\_\_\_\_\_ x

-3 -2 -1 0 1

Применяя метод интервалов, с помощью числовой оси решаем неравенство и получаем ответ:

x < -3, -2 < x < -1, x > 1. Его можно записать в виде объединения интервалов.

Ответ: (-∞; -3) U (-2; -1) U (1; +∞).

Разбиение на интервалы применяется не только для решения неравенств, но и для преобразования выражений (необходимых в процессе решения уравнений и неравенств), зависящих от его знака.

 Типичными примерами являются следующие преобразования:

1. раскрытие модуля
2. возведение неравенства в квадрат
3. извлечение квадратного корня.

Примеры

**Линейное неравенство**

-2х + 3 > х + 5.

-2x + 3 > x + 5$⟺3x< -2 ⟺x< -\frac{2}{3} $

Ответ: (-∞; -$\frac{2}{3}$).

**Кусочно-линейное неравенство**

|2х-3|≤ 5.

|2х-3| ≤ 5 ⟺|х - $\frac{3}{2}$| ≤ $\frac{5}{2}$ ⟺ $\frac{3}{2}$ - $\frac{5}{2}$ ≤ x ≤ $\frac{3}{2}+ \frac{5}{2}$.

Ответ: [-1; 4].

**Квадратное неравенство**

-2х2 + 5х -3 < 0.

-2х2 + 5х – 3 < 0 ⟺ 2x2 – 5x + 3 > 0; корни уравнения х1 = 1, х2 =$\frac{3}{2}$.

Ответ: (-∞; 1) U ($\frac{3}{2}$; + ∞).

**Степенное неравенство**

x3 < -1.

x3 < -1 ⟺ x < -1.

Ответ: (-∞; -1).

**Показательное неравенство**

2x ≥ -1.

Так как левая часть строго положительна, то неравенство выполняется при всех х.

Ответ: х - любое число.

**Логарифмическое неравенство**

$log\_{\frac{1}{2}}$(3-x) > -1.

ОДЗ: x < 3.

$log\_{\frac{1}{2}}$ (3-x) > -1 ⟺ 0 < 3 –x < 2 ⟺ $\left\{\begin{array}{c}x>1,\\x<3.\end{array}\right.$

Ответ: (1; 3).

**Домашнее задание**

1. **Сделать конспект в тетради**
2. **Ответить на вопросы ( ответы отправить на эл.почту преподавателя)**

**Вопросы и упражнения**

1. Какие неравенства называются равносильными?
2. Какой вид могут иметь множество решений линейного неравенства? квадратного неравенства?
3. Какие стандартные неравенства вы знаете? Какими могут быть множества их решений?
4. В чем состоит алгоритм решения рационального неравенства методом интервалов?
5. Какое свойство непрерывной функции используется в методе интервалов?