**13группа**

1. **Сделать конспект урока на тему Последовательности. Способы задания и свойства числовых последовательностей. Понятие о пределе последовательности.**

***Лекция***

***Тема:* Последовательности. Способы задания и свойства числовых последовательностей. Понятие о пределе последовательности.**

**Цели:** создание благоприятных условий для изучения понятия числовой последовательности; ввести определение предела последовательности и предела функции; познакомить с правилами вычисления пределов функции в точке и на бесконечности.

***Теоретический материаЛ***

**Определение№1:** *множество чисел, каждое из которых снабжено своим номером, называется числовой последовательностью.*

Элементы этого числового множества называются членами последовательности и обозначают: первый член - ***а* 1,** второй - ***а* 2** , n- й член - ***а* n** и т.д. Вся последовательность обозначается : ***а* 1, *а* 2, *а* 3, …, *а* n** или (***а* n** ).

Числовая последовательность представляет собой не что иное, как множество нумерованных чисел, упорядоченных наподобие натурального ряда, т.е. располагаемое в порядке возрастания номеров. Последовательность может содержать как конечное, так и бесконечное число членов.

*Последовательность, состоящая из конечного числа членов, называется конечной, а последовательность, состоящая из бесконечного числа членов, - бесконечной последовательностью.*

Иногда бесконечную числовую последовательность вводят, используя понятие функции:

**Определение №2:** *Функцию у = f(x), xN называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают: у = f(n), или у1, у2, у3..., уn или у(n).*

Последовательности можно задавать различными способами, например, ***словесно***, когда правило задавания последовательности описано словами, без указания формулы. Так, словесно задается последовательность простых чисел:

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,...

Особенно важны ***аналитический и рекуррентный*** способы задания последовательности.

Говорят, что последовательность задана ***аналитически***, если указана формула ее n-го члена.

***Приведем три примера.***

1. уn = n2. Это аналитическое задание последовательности

1,4,9,16,…, n2, …

Указав конкретное значение n, нетрудно найти член последовательности с соответствующим номером. Если. Например, n= 9, то у9 = 92 = 81, если

1. уn = С. Здесь речь идет о последовательности С, С, С, …., С, …. . Такую последовательность называют **постоянной** (или стационарной).
2. уn = 2n . Это аналитическое задание последовательности 2, 22, 23, ….,2n, …

***Рекуррентный способ*** задания последовательности состоит в том, что указывают правило, позволяющее вычислить *n*- й член последовательности, если известны ее предыдущие члены. Например, **арифметическая прогрессия – это числовая последовательность (*а*n), заданная рекуррентно соотношениями:**

***а* 1, = *а*, *а*n+1 = *а*n+ *d***

**(***а* и *d – заданные числа, d – разность арифметической прогрессии***)**

**Геометрическая прогрессия –** это числовая последовательность (*b*n)? Заданная рекуррентно соотношениями:

*b* 1, = *b,* *b*n+1 = *b*n·*q*

**(***b* и *q – заданные числа, b≠0, q ≠ 0; q знаменатель геометрической прогресси прогрессии***).**

**Пример:** Выписать первые пять членов последовательности, заданной рекуррентно:у1 =1; у2 = 1; уn = уn-2 + уn-1

Решение. n –й член последовательности равен сумме двух предшествующих ему членов. Значит, последовательно получаем:

у1 =1; у2 = 1; у3 =1+1 = 2; у4 = 1+ 2 = 3; у5 =2+3 =5; и т.д.

**Ограниченные последовательности.**

* Последовательность (хn) называется ограниченной, если существуют такие два числа m и М, что для всех n*N* выполняется неравенство m≤ хn ≤М.
* Последовательность (хn) называется ограниченной сверху, если существует такое число М, что для всех n*N* выполняется неравенство хn ≤М.
* Последовательность (хn) называется ограниченной снизу, если существует такое число m, что для всех n*N* выполняется неравенство m≤ хn

Например: последовательность (хn), заданная формулой общего члена хn = n, ограничена снизу (например, число 0) и не ограничена сверху.

**Монотонные последовательности.**

Последовательность (хn) называется возрастающей, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство хn+1 > хn.

Последовательность (хn) называется убывающей, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство хn+1 < хn.

Последовательность (хn) называется невозрастающей, если каждый ее член, начиная со второго, не более предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство хn+1 ≤ хn.

Последовательность (хn) называется неубывающей, если каждый ее член, начиная со второго, не меньше предыдущего, т.е. если для любого натурального n выполняется неравенство хn+1 ≥ хn.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности образуют класс *монотонных* последовательностей.

**Предел числовой последовательности.**

Рассмотрим для числовые последовательности – (*уn*) и (*xn*).

(*уn*): 1, 3,5, 7, 9, … 2n – 1, …;

(*xn*): 1, 

Изобразим члены этих последовательностей точками на координатной прямой.

**0 1 3 5 7 9 11 у**

**0 0,25 0,5 1**

Замечаем, что члены последовательности (*xn*) как бы «сгущаются» около точки 0 – говорят последовательность ***сходятся*** , а у последовательности (*уn*) такой точки сгущения нет – и говорят, что последовательность ***расходится.***

Математики не используют термин точка сгущения, а они говорят *предел последовательности.*

***Определение:*** *Число b называется пределом последовательности (уn), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержится все члены последовательности, начиная с некоторого номера.*

*Пишут так: уn→b или*  читают так: предел последовательности *уn при стремлении n к бесконечности равен b.*

На практике используется еще одно истолкование равенства , связанное с приближенными вычислениями: если последовательность *уn* = f(n) сходится к числу b, то выполняется приближенное равенство f(n)≈b, причем это приближенное равенство тем точнее, чем больше n.

**Необходимое условие сходимости произвольной числовой последовательности:**

Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо, чтобы она была ограниченной.

**Достаточное условие сходимости последовательности**.

Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится. (теорема К.Вейерштрасса)

**Свойства сходящихся последовательностей**

1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.
2. Если последовательность сходится, то она ограничена.
3. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.

***Если , то последовательность уn= qn расходится.***

**Теоремы о пределах последовательностей.**

1. 
2. Если 
3. Если , то
4. Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение: 
5. Предел суммы равен сумме пределов: 
6. Предел произведения равен произведению пределов: 
7. Предел частного равен частному пределов: , где с≠0.
8. Постоянный множитель можно выносить за знак предела: 

***Нахождение пределов последовательности:***

Найти предел последовательности:

а) хn =  б) хn = в) 

Решение: а) применив правило «предел произведения», получим:



б) применим правило «предел суммы» и получим:



в) в подобных случаях применяют искусственный прием: делят числитель и знаменатель дроби почленно на наивысшую из имеющихся степень переменной n. В данном примере разделим числитель и знаменатель дроби почленно на n2 . Имеем:  (здесь мы применили правило «предел дроби»).

***Пределы функций. Нахождение пределов функции в точке и на бесконечности.***

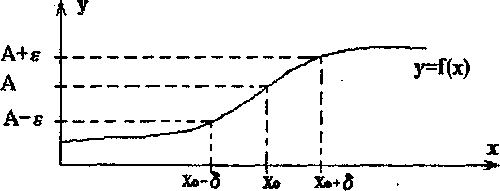
Теория пределов позволяет определить характер поведения функции у = f(x) при заданном изменении аргумента.

Пусть функция f(х) определена в некоторой окрестности точки х =х0, за исключением, быть может, самой точки х0.

Число А называется пределом функции f(х) в точке х0, если для любого числа >0 найдется такое положительное число , что для любого х ** х0, удовлетворяющего неравенству | х - хо | <, выполняется соотношение | f(x) - А | < 

То, что функция f(x) в точке х0 имеет предел, равный А, обозначают следующим образом: ******

Геометрически существование данного предела означает, что каково бы ни было >0, найдется такое число , что для всех х, заключенных между х0 + , и х0 -  (кроме, быть может, самой точки хс), график функции у = f(x) лежит в полосе, ограниченной прямыми у = А + и у = А- (рис.1)



**Рисунок 1**

Таким образом, понятие предела функции дает возможность ответить на вопрос, к чему стремятся значения функции, когда значения аргумента стремятся к х0

Число А называют пределом функции f(x) при х, стремящимся к х0, если разность f(x) - А по абсолютной величине есть величина бесконечно малая.

******

1. **Практическая работа на тему «Предел функции в точке».**
2. Вычислите:

а)  б) в)  г) д);

2. Вычислите пределы следующих функций:

а)

б)

в).

3. Используя разложение на множители преобразовать дроби и вычислить предел функции в точке:

а)  б)  в)  г)  д)

е) ;

ж) ;

з).

4. Найти предел функции в точке, используя способ избавления знаменателя(числителя) от иррациональности (помножить на сопряженное выражение):  
а) ; б) ; в) .